Eerstegraadslerarenopleiding

10 voor de leraar

Kennisbasis Wiskunde

versie maart 2018 | ingangsdatum studiejaar 2018-2019

10 voor de leraar

Voorwoord

Vanaf 2016 hebben lerarenopleiders over de volle breedte van de lerarenopleidingen in verschillende fases met veel enthousiasme gewerkt aan de herijking van de 60 kennisbases die sinds 2008 ontwikkeld zijn. Voor u ligt het mooie resultaat van de gezamenlijke inspanningen.

De kennisbases zijn herijkt op zowel de inhoud, het niveau als de breedte van de vakkennis. Daar waar mogelijk is samenhang aangebracht tussen de kennisbases die een inhoudelijke en vakoverstijgende verwantschap hebben. De inhoud van elke kennisbasis is uiteindelijk gevalideerd door het werkveld en externe inhoudelijke deskundigen. Het resultaat is in overeenstemming met landelijke eisen.

De lerarenopleidingen kunnen tevreden terugkijken op een periode waarin zij veel hebben gediscussieerd, geschaafd en bijgesteld. Een periode waarin lerarenopleiders intensief hebben nagedacht over hun vak, de didactiek en het minimale niveau dat een startbekwame leerkracht moet beheersen. Met de inzet van zoveel betrokken mensen wordt dit eindresultaat breed gedragen.

Al deze activiteiten hebben ook nog iets anders opgeleverd. Het bracht collega's van diverse instellingen met elkaar in contact. Ze kregen gelegenheid om met vakgenoten te discussiëren en daarmee hun eigen expertise aan te scherpen. Ook de contacten met het werkveld zijn versterkt. De samenwerking geeft een impuls aan de betrokkenheid van de lerarenopleiders bij de kwaliteitsverbetering en hun professionalisering.

Permanente kwaliteitszorg is essentieel voor de maatschappelijke opdracht. De kennisbases leveren daarvoor de ijkpunten. Het zijn geen statische documenten. De kennisbases blijven met enige regelmaat bijstelling nodig hebben vanwege vakinhoudelijke veranderingen, pedagogisch-didactische eisen, maatschappelijke ontwikkelingen en voortschrijdend inzicht. Dat houdt het gesprek over de inhoud van de lerarenopleidingen volop in leven en draagt daarmee bij aan de kwaliteitsslag die met het ontwikkelen van de kennisbases wordt beoogd.

De lerarenopleidingen weten elkaar beter te vinden en pakken uitdagingen gezamenlijk op. Hiermee dragen zij bij aan een goede opleiding voor de nieuwe generatie leraren en het onderwijs in Nederland.

Ik dank allen die hieraan hebben bijgedragen.

mr. Thom de Graaf,
voorzitter Vereniging Hogescholen

Inhoud

1 Inleiding

Voor u ligt de herijkte kennisbasis van de eerstegraadslerarenopleiding Wiskunde. Deze kennisbasis beschrijft wat minimaal van een startbekwame leraar mag worden verwacht, zowel qua inhoud als het bijbehorende niveau, ongeacht de instelling waar de student is opgeleid. Het afnemende scholenveld en externe inhoudelijk deskundigen hebben bijgedragen aan de validering van deze kennisbasis.

Deze herijkte kennisbasis is geldig met ingang van het studiejaar 2018–2019 en is in eerste instantie bedoeld voor de lerarenopleiders zelf, maar ook voor hun studenten of externe belanghebbenden.

De kennisbasis is als volgt opgebouwd:

Algemene toelichting

In het hoofdstuk *Algemene toelichting* is informatie opgenomen over de aanleiding, ontwikkeling, inhoud en herijking van de kennisbases.

Verantwoording

In het hoofdstuk *Verantwoording* geeft het redactieteam van de kennisbasis een toelichting op de totstandkoming van de herijkte kennisbasis en legt het verantwoording af over de gemaakte keuzes.

Beschrijving kennisdomeinen

In het hoofdstuk *Beschrijving kennisdomeinen* zijn de vakinhoudelijke en vakdidactische (sub)domeinen opgenomen evenals het minimale niveau waarop de student de (sub)domeinen moet beheersen.

Redactie en validering

In het hoofdstuk *Redactie en validering* vindt u een overzicht van de redactie- en valideringsleden die betrokken zijn geweest bij de herijking van deze kennisbasis.

10 voor de leraar

2 Algemene toelichting

Versterken kenniscomponent

In de eerste jaren van dit millennium was er brede kritiek op de vakinhoudelijke en vakdidactische kwaliteit van de lerarenopleidingen. Als antwoord hierop presenteerde staatssecretaris Van Bijsterveldt in 2008 de nota *Krachtig meesterschap, kwaliteitsagenda voor het opleiden van leraren 2008–2011*. Een onderdeel van de kwaliteitsagenda betreft de verbetering van de vakinhoudelijke kwaliteit van de lerarenopleidingen. 'Het eindniveau van de opleidingen wordt duidelijk vastgelegd. Hiertoe ontwikkelen de opleidingen in samenwerking met het afnemende veld een gezamenlijke kennisbasis, eindtermen en examens'.

De gezamenlijke lerarenopleidingen hebben met het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap afspraken gemaakt om de kenniscomponent binnen de opleidingen te versterken. Het systeem van kennisborging bestaat uit drie landelijke kwaliteitsinstrumenten: kennisbases, kennistoetsen en peer-review. Alle activiteiten zijn ondergebracht in het programma *10voordeleraar*, onder de paraplu van de Vereniging Hogescholen. Ruim duizend lerarenopleiders werken binnen kennisnetwerken gezamenlijk aan de kwaliteitsinstrumenten. Met elkaar bepalen en borgen ze het minimale eindniveau van een afgestudeerde student. Ook andere deskundigen maken onderdeel uit van de processen voor legitimatie en validatie.

Ontwikkeling kennisbases

In de periode 2008–2011 hebben lerarenopleiders over de volle breedte van de hbo-lerarenopleidingen gezamenlijk de kennisbases ontwikkeld. Het afnemende scholenveld en externe inhoudelijk-deskundigen hebben bijgedragen aan de validering van de inhoud. In totaal zijn 62 kennisbases opgesteld. Na validatie van de kennisbases hebben de opleidingen hun onderwijsprogramma aangepast. Het kader van de kennisbases legt voor 80% de brede en gemeenschappelijke basis vast van wat in de opleiding aan bod komt. Daarbuiten is er ruimte voor een eigen profilering van de individuele instelling.

De kennisbases sluiten aan bij het hbo-niveau: NLQF, Dublin-descriptoren en hbo-kwalificaties. Dit betekent dat een afgestudeerde student een brede kennis moet hebben van het vakgebied waarin hij les gaat geven en dat hij boven de stof staat. Ook moet aandacht besteed worden aan de verwante of aanpalende vakken van het vakgebied, waarin later wordt lesgegeven. Voor de leraar in de bovenbouw havo en vwo betekent dit dat hij zijn leerlingen kan adviseren en wegwijs maken in de mogelijke vervolgopleidingen die voortbouwen op zijn vak, kan aangeven wat de beroepsgerichte toepassingen (en de ontwikkelingen) van het vak zijn en dat hij zijn leerlingen voorbereidt op het (landelijke) examenprogramma. Daarnaast vormen de kennisbases de uitwerking van de wettelijke bekwaamheidseisen zoals vastgelegd in het beroepsregister leraar. De kennisbases bevatten daarmee de beschrijving van de vakinhoudelijke, vakdidactische en pedagogische kennis én vaardigheden die een student moet beheersen op het moment van afstuderen.

Hoewel niet specifiek aangegeven in de kennisbases, heeft elke leraar een rol in taalgericht of taalontwikkelend vakonderwijs. Leerlingen zijn in vaklessen (vak)taal aan het verwerven, waarbij taalontwikkeling en begripsontwikkeling hand in hand gaan. Het betreft zowel *Dagelijkse Algemene Taalvaardigheid* (DAT) als *Cognitieve Academische Taalvaardigheid* (CAT). Taalgericht lesgegeven komt naar voren bij de gebruikte vakdidactische werkvormen en de taalgerichtheid van toetsen en beoordelen.

Herijking kennisbases

Vakinhoudelijke veranderingen, maatschappelijke ontwikkelingen en voortschrijdend inzicht maken het wenselijk dat iedere kennisbasis met enige regelmaat wordt beoordeeld op de inhoud en waar nodig wordt aangepast. Dit maakt ook deel uit van de afspraken met het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap. In het studiejaar 2015–2016 is gestart met het herijken van de oorspronkelijke kennisbases.

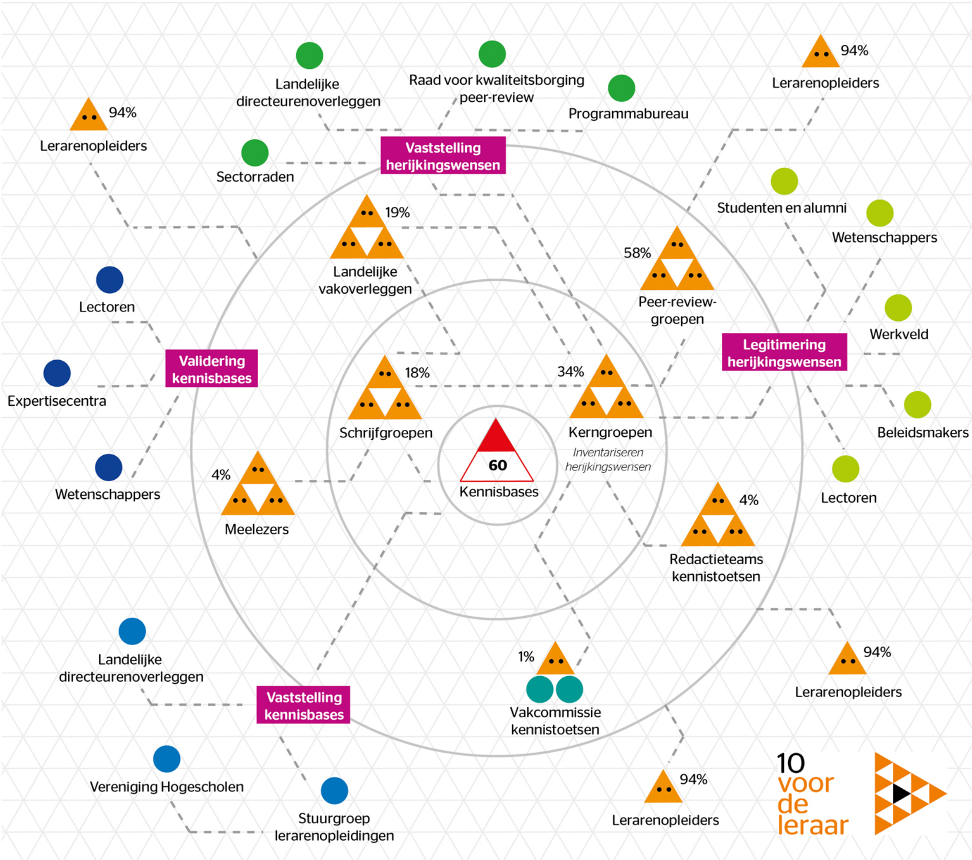
De kennisbases zijn door de lerarenopleidingen herijkt op inhoud en niveau. Ook is gekeken naar de breedte van de vakkennis, zodat de kennisbases het desbetreffende werkterrein (basisonderwijs, tweedegraadsgebied, eerstegraadsgebied) van de toekomstige leraar geheel dekken. Daar waar mogelijk is samenhang aangebracht tussen de kennisbases die inhoudelijk en vakoverstijgende verwantschap kennen. Daarnaast is de nadruk gelegd op de implementatie van een aantal (maatschappelijk) belangrijke vakoverstijgende thema's. De herijkte kennisbases zijn getoetst aan de laatste wetenschappelijke inzichten van het vak, de ontwikkelingen in het werkveld en veranderingen op het gebied van landelijk beleid.

Herijkingsproces

Het herijkingsproces is zodanig vormgegeven dat iedereen die betrokken is bij een vak of opleiding gevraagd of ongevraagd mee kon denken, zodat er een breed draagvlak voor de kennisbasis bestaat. Lerarenopleiders vormden de spil bij het herijkingsproces.

Voor elke kennisbasis heeft de kerngroep bestaande uit lerarenopleiders van de verschillende instellingen de herijkingswensen geïnventariseerd en ter legitimatie voorgelegd aan relevante betrokkenen, waaronder alumni, lectoren, wetenschappers en/of beleidsmakers. Het definitieve herijkingsvoorstel is vastgesteld door een vaststellingscommissie, waar onder andere het landelijk overleg vakmasters (LOVM) deel van uitmaakte. Hun specifieke taak was erop toe te zien dat de vastgestelde procedure juist is gevolgd. Zo hebben ze bijvoorbeeld bekeken of alle belanghebbenden afdoende zijn gehoord en of de gemaakte keuzes voldoende zijn toegelicht.

Na vaststelling van het herijkingsvoorstel is de schrijfgroep aan de slag gegaan met het herschrijven van de kennisbasis. Onder leiding van het LOVM is het opgeleverde concept gevalideerd door vertegenwoordigers van het werkveld, van de wetenschap en van eventuele vakverenigingen. Na verwerking van de opmerkingen zijn de herijkte kennisbases met een positief advies van het LOVM door de Stuurgroep Lerarenopleidingen van de Vereniging Hogescholen bestuurlijk vastgesteld.



Betrokkenen bij het herijkingsproces kennisbases lerarenopleidingen.

10 voor de leraar

3 Verantwoording

Samenstelling en status kennisbasis

De herijkte kennisbasis wiskunde is in 2017–2018 ontwikkeld door de vakredactie wiskunde. Deze bestond uit vertegenwoordigers van de instellingen die deze vakmaster aanbieden: Amsterdam (HvA), Tilburg (FLOT), Sittard (FLOS), Utrecht (HU), Leeuwarden (NHL Stenden) en Arnhem-Nijmegen (HAN). De tekst van de kennisbasis is gebaseerd op de tekst van de kennisbasis uit 2010. Bij de totstandkoming van de herijkte kennisbasis is gebruik gemaakt van adviezen en reacties van de vakdocenten van de verschillende opleidingen, vakexperts van universiteiten en hogescholen, wiskundeleraren uit het werkveld en van de landelijke vakvereniging. In deze kennisbasis worden de vakkennis en de didactische kennis beschreven die wij noodzakelijk achten in de opleiding tot eerstegraadsleraar wiskunde. In deze kennisbasis wordt geen algemene onderwijskundige kennis beschreven en wordt ook niet ingegaan op stage en praktijkonderzoek in de masteropleiding. De kennisbasis is geen leerplan. Elke opleiding blijft zelf verantwoordelijk voor het curriculum – maar wel gebaseerd op deze kennisbasis – en stelt deze vast in overeenstemming met haar eigen didactische concept.

Relatie met kennisbasis tweedegraadslerarenopleiding

In 2017 is de kennisbasis wiskunde van de bacheloropleiding tot tweedegraadsleraar wiskunde vastgelegd. Hierin is zowel vakinhoud als vakdidactiek beschreven. Deze kennisbasis van de master bouwt hierop voort. De kennis uit de kennisbasis master is verdiepend en verbredend ten opzichte van de kennis opgebouwd in de bachelor.

Visie op de eerstegraadsleraar wiskunde

De opleiding tot eerstegraadsleraar wiskunde leidt op voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Ons eerste uitgangspunt daarbij is: *de eerstegraadsleraar overziet en beheerst de inhouden en de achtergronden van de wiskunde uit de domeinen in de bovenbouw en in de aanpalende vakken van het vo uitstekend.*

Daarnaast moet een eerstegraadsleraar ook een rol spelen in het voorbereiden van leerlingen in het voortgezet onderwijs op het vervolgonderwijs. Daarom is ons tweede uitgangspunt: *de eerstegraadsleraar kent de wiskundeleerstof in de eerste fase van het vervolgonderwijs op de (technische) universiteiten en hogescholen.*

Ten slotte willen we leraren opleiden die wiskunde in een breder perspectief kunnen plaatsen en kijk hebben op wiskunde als wetenschappelijke discipline. Daarom is ons derde uitgangspunt: *de eerstegraadsleraar is vertrouwd met de vakwetenschappelijke benadering van wiskunde en heeft een reëel beeld van haar beoefening en toepassing binnen de algehele wetenschappelijke en technologische ontwikkeling.*

Algemene uitgangspunten

In de kennisbasis wordt vooral specifieke vakkennis beschreven. De opleiding moet die vakkennis, in samenhang en gecombineerd met de generieke opleidingsonderdelen, op basis van de bovengenoemde drie uitgangspunten vervatten in een programma dat waarborgt dat een afgestudeerde eerstegraadsleraar aan de volgende eisen voldoet.

1. De leraar kent een diversiteit aan **toepassingen**, die laten zien dat wiskunde in de huidige maatschappij een onmisbare factor is.
2. De leraar is vertrouwd met de **deductieve methode** in de wiskunde.
3. De leraar kent de initiële wiskundestof van **vervolgopleidingen**, en is in staat leerlingen adequaat te adviseren over de keuze van een studie en de rol van wiskunde daarin.
4. De leraar kan **ict** op een effectieve manier inzetten om het leren van wiskunde door leerlingen te bevorderen en om leerlingen zicht te bieden op de rol van technologie in de beoefening en de toepassing van wiskunde.
5. De leraar kan de centrale concepten en methoden uit de **schoolwiskunde** plaatsen in de lijn waarin zij binnen de wiskunde worden behandeld en gebruikt.
6. De leraar kent de **historische context** waarbinnen de centrale concepten en methoden uit de schoolwiskunde zijn ontstaan.
7. De leraar kan op een **onderzoekende manier** wiskunde bedrijven.
8. De leraar kent de wiskunde als een **heuristische discipline**, waarin men gericht is om open vragen op te lossen in zuiver en in toepassingsgericht onderzoek.

Indeling kennisbasis

De leerstof en kennis in de kennisbasis vakmaster wiskunde is verdeeld over de vijf vakdomeinen analyse, meetkunde, algebra en discrete wiskunde, statistiek, wetenschappelijke grondslagen en ontwikkelingen en het zesde domein vakdidactiek.

De meeste domeinen bestaan uit meerdere subdomeinen. In totaal bestaat de kennisbasis uit 15 subdomeinen.

In de kennisbasis wordt bij elk subdomein een korte omschrijving van de meest wezenlijke concepten gegeven en zijn indicatoren en enkele kenmerkende opgaven of opdrachten opgenomen die het masterniveau omschrijven.

Verplichte en keuze-subdomeinen

De subdomeinen kunnen niet alle in het curriculum (waarvan ongeveer 60 studiepunten voor vak en vakdidactiek zijn gereserveerd) worden opgenomen. In overeenstemming met de uitgangspunten en de visie is daarom gekozen voor verplichte subdomeinen en keuze-subdomeinen.

Er zijn acht verplichte subdomeinen. Dat zijn de kerndomeinen die we wezenlijk achten in de opleiding en die noodzakelijk zijn om de doelen geformuleerd in bovenstaande algemene uitgangspunten te realiseren. De verplichte subdomeinen zijn basisconcepten analyse, dynamische systemen, meetkunde, lineaire algebra, getaltheorie, statistiek, grondslagen en vakdidactiek.

Daarnaast zijn er keuze-subdomeinen die elk afzonderlijk een goede bijdrage kunnen leveren aan de wiskundige ontwikkeling – in breedte en diepte – van de student. Elke student neemt minstens twee keuze-domeinen in zijn programma op.

Elke opleiding mag naar eigen inzicht meer subdomeinen aanbieden. Dat kunnen subdomeinen zijn uit het overzicht in deze kennisbasis maar een opleiding mag ook kiezen voor een onderdeel dat niet in deze kennisbasis is beschreven.

Subdomein geschiedenis

In de algemene uitgangspunten wordt aangegeven dat een opleiding aandacht dient te geven aan de historische context waarbinnen de centrale concepten en methoden uit de schoolwiskunde zijn ontstaan. Dit kan gebeuren door het optionele subdomein geschiedenis als onderdeel in het programma op te nemen. Een opleiding kan er ook voor kiezen om inhouden zoals die beschreven zijn in het subdomein geschiedenis te integreren in diverse andere subdomeinen. Ook een combinatie van geschiedenis en grondslagen is een optie die goed binnen een opleidingscurriculum past.

Ict

De opleiding dient – conform uitgangspunt 4 – aandacht te besteden aan voor wiskunde specifieke Ict-toepassingen die een rol kunnen spelen in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs of in het hbo. Dat betekent dat er binnen de verschillende domeinen met vakspecifieke Ict moet worden gewerkt. Zo kan bij analyse/getaltheorie een Computer Algebra Systeem worden ingezet, bij meetkunde software voor dynamische meetkunde, en bij statistiek een statistisch softwarepakket.

4 Beschrijving kennisdomeinen

Opbouw kennisdomeinen

Domein 1: Analyse
Subdomein 1.1: Basisconcepten analyse
Subdomein 1.2: Meervoudige integraalrekening
Subdomein 1.3: Dynamische systemen
Subdomein 1.4: Complexe functies
Domein 2: Meetkunde
Subdomein 2.1: Synthetische en analytische meetkunde
Subdomein 2.2: Projectieve meetkunde
Domein 3: Algebra en discrete wiskunde
Subdomein 3.1: Lineaire algebra
Subdomein 3.2: Getaltheorie
Subdomein 3.3: Grafentheorie en discrete optimalisatie
Subdomein 3.4: Combinatoriek
Subdomein 3.5: Algebra
Domein 4: Statistiek en kansrekening
Subdomein 4.1: Statistiek
Domein 5: Wetenschappelijke grondslagen en ontwikkelingen
Subdomein 5.1: Grondslagen
Subdomein 5.2: Geschiedenis
Domein 6: Vakdidactiek
Subdomein 6.1: Vakdidactiek

10 voor de leraar

Domein 1: Analyse

1.1 Basisconcepten analyse

Verplicht

De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de volgende concepten: functie, limiet, continuïteit, differentieerbaarheid, reeks, supremum en infimum, extremen, existentiestellingen voor nulpunten en extreme waarden, partiële afgeleide, totale afgeleide en richtingsafgeleide.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan supremum en infimum van verzamelingen bepalen.
2. De eerstegraadsleraar kan de limietdefinitie hanteren bij functies van een of meer variabelen over de reële getallen en limieten bewijzen met behulp van een 'epsilon-delta'-bewijs.
3. De eerstegraadsleraar kan bewijzen dat een functie continu en (totaal) differentieerbaar is, en verbanden leggen tussen deze begrippen.
4. De eerstegraadsleraar kan met de fundamentele stellingen uit de analyse (onder andere Bolzano-Weierstrass, tussenwaardestelling, extremewaardenstelling, middelwaardestelling) existentie en uniciteit van nulpunten en extremen aantonen.
5. De eerstegraadsleraar kan convergentie van reeksen onderzoeken en taylorreeksen opstellen bij functies van één variabele en daarmee functiewaarden benaderen en limieten berekenen.
6. De eerstegraadsleraar kan kettingregels voor functies van meer variabelen afleiden en toepassen.
7. De eerstegraadsleraar kan partiële afgeleiden en richtingsafgeleiden berekenen en daarmee vergelijkingen van raaklijnen en raakvlakken opstellen.
8. De eerstegraadsleraar kan extremen bepalen van functies van één en van meer variabelen, eventueel onder voorwaarden.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 4

De functie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar op $[0, 1]$.
Gegeven is verder, dat $f(0) = -1$ en $f'(x) > 1$ voor alle $x \in [0, 1]$.

1. Bewijs dat $f(1) > 0$.
2. Bewijs dat f precies één nulpunt heeft op $[0, 1]$.

Vragen bij indicator 2 en 7

Gegeven is de functie f van $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met voorschrift:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+2y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Bewijs dat f continu is in $(0, 0)$.

2. Bepaal $f_x(x, y)$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$ en bereken $f_x(0, 0)$.
3. Toon aan dat f_x niet continu is in $(0, 0)$.
4. Bereken voor alle reële waarden $a > 0$ in het punt $(0, a)$ de richtingsafgeleide in de richting van $c = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1.2 Meervoudige integraalrekening

Keuze

De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de volgende concepten: integreerbaarheid, coördinatentransformatie, oppervlakte-integraal en lijnintegraal.

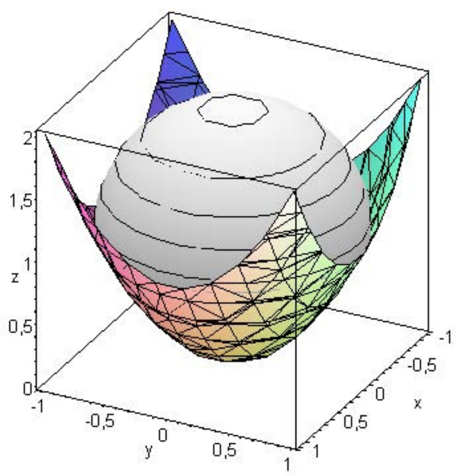
Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan bij functies van meer variabelen dubbelintegralen betekenis geven en berekenen met diverse integratietechnieken;
2. De eerstegraadsleraar kan rekentechnieken voor meervoudige integralen verklaren en toepassen;
3. De eerstegraadsleraar kan in voorkomende situaties bij aanpalende vakgebieden integraalrekening verklaren en demonstreren;
4. De eerstegraadsleraar kan integraalrekening herkennen en toepassen in contexten onder andere betreffende lengte-, oppervlakte- en inhoudsberekeningen.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 1 en 2

In onderstaand figuur zie je twee oppervlakken in de $\mathbb{R}^3$.



De vergelijkingen bij de oppervlakken zijn $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ en $z = x^2 + y^2$. In de tekening zie je niet echt goed de doorsnede.

1. Beschrijf met een formule en meetkundig de doorsnede van de twee oppervlakken.
2. Het gebied vastgelegd door $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ en $z \geq x^2 + y^2$ noemen we S.

a. Laat zien dat voor de punten in dat gebied geldt $r^2 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - r^2}$ met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b. Bereken de inhoud van gebied S.

Vragen bij indicator 2

1. Bereken $\iint_S 2xy \, dA$ waarin S het gebied is beschreven door $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $x^2 + y^2 \geq 4$.

1.3 Dynamische systemen

Verplicht

De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de volgende concepten: lineaire en niet-lineaire differentie- en differentiaalvergelijkingen, oplossingsmethoden, stabiliteit, stelsels differentie- en differentiaalvergelijkingen en faseportret.
En een keuze uit: machtreekssubstitutie, numeriek oplossen, periodiciteit en chaos en fractals.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan discrete en continue (stelsels) differentie- en differentiaalvergelijkingen opstellen en gebruiken bij toepassingen zoals koelwet, trillingen, roofdier-prooimodellen.
2. De eerstegraadsleraar kan eerste en tweede orde differentiaalvergelijkingen oplossen met diverse oplossingsmethoden; een selectie uit: scheiden van variabelen, integrerende factor, homogene differentiaalvergelijkingen, exacte differentiaalvergelijkingen, differentiaalvergelijkingen van Bernoulli, differentiaalvergelijkingen van Euler en variatie van constanten.
3. De eerstegraadsleraar kan lineaire stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen omzetten naar hogere orde differentiaalvergelijkingen en andersom en oplossen, onder andere met behulp van eigenwaarden.
4. De eerstegraadsleraar kan de stabiliteit van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen analyseren met behulp van een faseportret en de aard van kritieke punten typeren.
5. De eerstegraadsleraar kan zich naast bovenstaande basistheorie verder theoretisch verdiepen in minstens een van de onderstaande onderwerpen:
   (a) differentiaalvergelijkingen oplossen met een machtreekssubstitutie;
   (b) met verschillende numerieke methoden, bijvoorbeeld de methode van Heun of Runge-Kutta, oplossingen van differentiaalvergelijkingen numeriek benaderen;
   (c) met behulp van de theorie van Bendixson en Poincaré de periodiciteit van oplossingen en de stabiliteit met de methode van Lyapunov onderzoeken;
   (d) theorie van discrete dynamische systemen toepassen in chaos- en fractaltheorie;
   (e) theorie van invariante verzamelingen, stabiliteit en bifurcaties toepassen, inclusief gevolgen daarvan voor globale en lokale faseportretten.

10 voor de leraar

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 2

Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

1. $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = e^{x/2}$, geen beginwaarden, maar wel geldt $x > 0$
2. $y''(x) + y(x) = x^2 + \sin x$, voorwaarden $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$
3. $\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0$, voorwaarden $T(1) = 15$ en $T(2) = 25$
4. $xy' + y = y^2 \ln x$, geen beginwaarden, maar wel geldt $x > 1$
5. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$, voorwaarden $x(0) = y(0) = 1$ en $x'(0) = y'(0) = 1$
6. $(y \cdot \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y'(x) = 0$, voorwaarden $y(0) = 2$

Vragen bij indicator 1 en 2

In een tank met 100 liter water is 5 kg zout opgelost. Aan de bovenkant van de tank laat men op tijdstip $t = 0$ schoon water in de tank stromen met een snelheid van 2 liter per minuut. Aan de onderkant van het vat zit een opening waaruit het (zoute) water met een snelheid van 3 liter per minuut wegloopt. Midden in de tank zit een ronddraaiende schroef die het water in de tank voortdurend mengt. Omdat er schoon water in de tank stroomt en zout water wegloopt zal de hoeveelheid opgelost zout in de tank afnemen.

Geef de hoeveelheid zout (in kg) op tijdstip t (in minuten) aan met $m(t)$.

1. Stel een differentievergelijking voor de massa zout op en bepaal met de differentievergelijking de hoeveelheid zout na 8 minuten als $\Delta t = 0{,}5$.
2. Leid uit de differentievergelijking een differentiaalvergelijking af en los de differentiaalvergelijking op.
3. Bereken met de oplossing van 2) de hoeveelheid zout in de tank na 8 minuten en vergelijk je antwoord met het antwoord van 1).

1.4 Complexe functies

Keuze

De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de volgende concepten: de complexe basisfuncties sin, cos en exp, de complexe meerwaardige functies wortel en log, complexe functies als transformaties van het (complexe) vlak inclusief möbiustransformaties, complexe differentieerbaarheid, Cauchy-Riemann-vergelijkingen, complexe lijnintegralen, (hoofd)stelling van Cauchy, residuenstelling en toepassing op het berekenen van reële integralen.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan complexe functiewaarden berekenen (o.a. wortel, sin en cos, exp en ln).
2. De eerstegraadsleraar kan complexe limieten bepalen.
3. De eerstegraadsleraar kan een complexe functie onderzoeken op continuïteit en differentieerbaarheid.

4. De eerstegraadsleraar kan complex-differentieerbaarheid vergelijken met gewone differentieerbaarheid.
5. De eerstegraadsleraar kan de onderlinge verbanden tussen analyticiteit, comformiteit en complexe differentieerbaarheid benoemen, en in bewijsvoeringen en berekeningen benutten.
6. De eerstegraadsleraar kan complexe functies integreren langs geparametriseerde gladde bogen.
7. De eerstegraadsleraar kan residuen van complexe functies berekenen en met behulp van die residuen contourintegralen berekenen.
8. De eerstegraadsleraar kan de contourintegraal gebruiken om reële integralen te bepalen.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 7 en 8

1. C is de rechterhelft van de cirkel $|z| = 6$, van $z = -6i$ tot $z = 6i$. Toon aan dat: $\left|\int_C \frac{1}{z^2-2i} dz\right| \leq \frac{3}{17}\pi$.

2. Bereken: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\cos t} dt$.

Vragen bij indicator 5

Zij G een gebied in $\mathbb{C}$. Beschouw de uitspraken:

(i) f is complex-differentiëerbaar op G
(ii) f heeft een complexe primitieve op G

1. Toon aan: (ii)$\Rightarrow$(i). Geef daarbij de gebruikte stellingen aan.
2. Geldt ook (i)$\Rightarrow$(ii)? (onderscheid: G wel of niet enkelvoudig samenhangend)

Domein 2: Meetkunde

2.1 Synthetische en analytische meetkunde

Verplicht

De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de basisconcepten uit de synthetische en analytische meetkunde, waaronder: axiomatiek, stellingen, deductieve opbouw (axioma, definitie, stelling), isometrie, gelijkvormigheid, inversie, constructies.

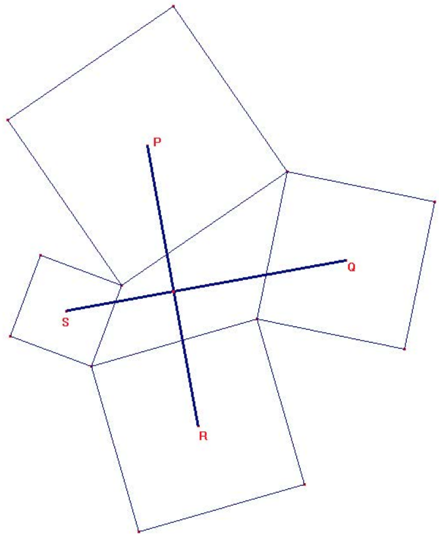
Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan afleidingen vanuit axiomatiek met betrekking tot meetkunde herkennen, analyseren en creëren.
2. De eerstegraadsleraar kan bijzondere meetkundige stellingen benoemen, bewijzen en demonstreren (voorbeelden: machtsstellingen, rechte van Wallace, Ceva, Morley, Aubel, etc.).
3. De eerstegraadsleraar kan synthetische redeneringen, analytische methoden en algebraïsche technieken toepassen in meetkundige probleemsituaties en verbanden hiertussen aangeven.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 2
Op de zijden van een willekeurige vierhoek staan vierkanten.
De middens daarvan noemen we met de klok mee: P, Q, R en S.

1. Bewijs: $|PR| = |QS|$ en $PR \perp QS$.



2. Bewijs: De middens van PQ, QR, RS en SP vormen weer een vierkant.

Vragen bij indicator 4
Van de cirkelraakproblemen van Apollonius laat zich een aantal gemakkelijk oplossen met behulp van inversie. Zoek dat uit voor de gevallen PCC en PLC.

2.2 Projectieve meetkunde

Keuze

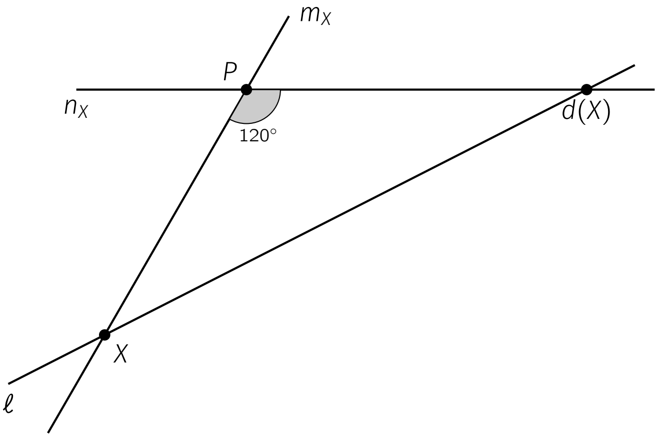
De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de volgende concepten: projectieve rechte, projectieve vlak, dualiteit, dubbelverhouding, harmonische ligging, volledige vierhoek, perspectiviteit, projectieve afbeelding, involutie, collineatie, kegelsnede, poolverwantschap, de stellingen van Desargues, Pappos, Steiner, Pascal en Brianchon.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan verband leggen tussen principes van het perspectieftekenen en de basisconcepten van de projectieve meetkunde.
2. De eerstegraadsleraar kan eigenschappen van gegeven figuren bewijzen.
3. De eerstegraadsleraar kan bijzondere punten en lijnen in een gegeven figuur construeren en de correctheid van de gehanteerde constructie aantonen.
4. De eerstegraadsleraar kan meetkundige vraagstukken oplossen met behulp van projectieve middelen.
5. De eerstegraadsleraar kan verband leggen tussen kegelsneden en projectieve afbeeldingen tussen lijnenwaaiers of puntenreeksen.
6. De eerstegraadsleraar kan redeneringen opzetten met, en verbanden leggen tussen, de begrippen en stellingen uit de projectieve meetkunde.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 6



Gegeven is een lijn ℓ en een punt P niet op ℓ. Op ℓ wordt de afbeelding d gedefinieerd op de volgende manier. Voor X op ℓ:

- trek de lijn m_X door X en P;
- draai m_X om P over een hoek van 120° (in positieve draaizin); dit levert de lijn n_X;
- snijd n_X met ℓ; dit levert $d(X)$.

1. Beredeneer dat d een projectieve afbeelding op ℓ is.
2. Bewijs dat d geen dekpunten heeft.
3. Bij de afbeelding d komt elk punt X na d drie keer toe te passen weer op zichzelf terecht, oftewel: er geldt $\forall X \in \ell : d\,(d\,(d\,(X))) = X$. Bewijs dat voor elke projectieve afbeelding $f : \ell \to \ell$ zonder dekpunten het volgende geldt:

$$\exists X \in \ell : f\,(f\,(f\,(X))) = X \iff \forall X \in \ell : f\,(f\,(f\,(X))) = X.$$

Vragen bij indicator 2 en 5

1. Gegeven zijn de parallellogrammen $OAPC$ en $OBQD$. De punten O, A en B zijn collineair, evenals O, C en D. Bewijs dat de lijnen AD, BC en PQ concurrent zijn.
2. Zij gegeven een rechte m en twee punten A en B niet op m. Voor een punt C op m bekijken we driehoek ABC; we construeren met behulp van de hoogtelijnen uit A en uit B het hoogtepunt H van deze driehoek. Als we nu het punt C van de driehoek laten bewegen over m, laat H een spoor achter. Bewijs met behulp van projectieve meetkunde dat het spoor van H een (al dan niet ontaarde) kegelsnede is die door A en B gaat.

Domein 3: Algebra en discrete wiskunde

3.1 Lineaire algebra

Verplicht

De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de volgende concepten: lineaire ruimte, lineaire afbeelding, onafhankelijkheid, matrix (van afbeelding), inverse matrix, rang, determinant, inproduct en uitproduct, inproductruimte, kern, beeldruimte, basis, dimensie, determinant, karakteristiek polynoom, eigenvectoren en eigenruimte, orthogonale projectie en afbeelding, orthogonalisatie, orthogonaal complement en diagonalisatie.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan algemene meetkundige concepten interpreteren in de meetkunde van $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.
2. De eerstegraadsleraar kan de stellingen over dimensie en determinant gebruiken bij het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen.
3. De eerstegraadsleraar kan bij een gegeven lineaire afbeelding de matrix ten opzichte van een gegeven basis, kern en beeldruimte bepalen.
4. De eerstegraadsleraar kan een gegeven basis orthonormaliseren, bij een gegeven lineaire afbeelding eigenwaarden met bijbehorende eigenruimten bepalen, en zo mogelijk diagonaliseren.
5. De eerstegraadsleraar kan eigenschappen van gegeven stelsels, matrices, afbeeldingen en ruimten bewijzen op basis van de formele definities.
6. De eerstegraadsleraar kan de behandelde noties illustreren en toepassen in een aantal toepassingen zoals de kleinstekwadratenmethode, markovprocessen, leontiefmodellen, de classificatie van kegelsneden en kwadrieken, of stelsels differentiaalvergelijkingen.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicatoren 1 en 3

Gegeven in $\mathbb{R}^3$ zijn de drie vectoren (geschreven ten opzichte van de standaardbasis e):

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deze drie vectoren staan loodrecht op elkaar en vormen een basis voor $\mathbb{R}^3$, die wij zullen aangeven met u.

1. Schrijf de vector $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als lineaire combinatie van u_1, u_2 en u_3.

Van de lineaire afbeelding L is bekend dat: $[L]_u^u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Beschrijf de afbeelding L meetkundig.
3. Bepaal de matrix van L t.o.v. de standaardbasis e.

Vragen bij indicator 5

In een inproductruimte V is gegeven een orthonormaal stelsel vectoren $\{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$. Bewijs dat het stelsel onafhankelijk is.

3.2 Getaltheorie

Verplicht

De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de volgende concepten: deelbaarheid, irrationaliteit, priemgetal, priemfactorontbinding, priemtest, factorisatietechniek, grootste gemene deler, lineaire diophantische vergelijking, ϕ-functie van Euler, modulair rekenen en cryptosysteem.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan bij getaltheoretische vraagstukken herkennen welke begrippen en stellingen hierbij bruikbaar zijn om deze vervolgens correct toe te passen.
2. De eerstegraadsleraar kan een aantal getaltheoretische stellingen bewijzen en formules afleiden, waaronder in elk geval: de hoofdstelling van de rekenkunde (eenduidige priemfactorontbinding), ϕ-functie van Euler, Euclides' bewijs voor het bestaan van oneindig veel priemgetallen, correctheid van het (uitgebreide) algoritme van Euclides, oplosbaarheid van lineaire diophantische vergelijkingen en stellingen van Euler en Fermat; verder een selectie uit: formules voor $\delta(n)$ en $\sigma(n)$, priemgetallen in een rekenkundige rij (Dirichlet), Wilson, multiplicativiteit van de ϕ-functie, Gauss' ϕ-stelling, Chinese reststelling.
3. De eerstegraadsleraar kan toepassingen beschrijven van getaltheorie en de hierbij gebruikte wiskundige technieken toelichten en voorbeeldmatig gebruiken, bijvoorbeeld: (i) cryptosystemen (zoals RSA), (ii) factorisatietechnieken (zoals de kwadratische zeef) en (iii) (probabilistische) priemtesten (zoals Miller-Rabin).

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 2

1. Licht de rol van de stelling van Euler toe bij het oplossen van de onderstaande vergelijking en los deze vergelijking vervolgens op.

$$x^{11} \equiv 3 \pmod{323}$$

2. Bewijs met volledige inductie dat voor fermatgetallen $F_n = 2^{2^n} + 1$ geldt dat

$$F_0 \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_{m-1} = F_m - 2.$$

   Leid hieruit af dat elk tweetal verschillende fermatgetallen relatief priem is en laat tenslotte zien dat hiervan een direct gevolg is dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

3. *Indien gekozen is voor de stelling van Dirichlet:* Een *James-Bond-priemgetal* is een priemgetal dat eindigt op de cijfers '007'. Geef een schatting van het aantal James-Bond-priemgetallen van precies 10 cijfers.

Vragen bij indicator 4

1. *Indien gekozen is voor de kwadratische zeef:* Bij de kwadratische zeef voor $N = 1843$ nemen we als factorbasis $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Bepaal een geschikt x_i-product dat leidt tot de ontbinding van N.
2. *Indien gekozen is voor de Miller-Rabin-test:* Ontmasker met de Miller-Rabin priemtest het carmichaelgetal 561 als samengesteld (een carmichaelgetal is een fermat-pseudopriemgetal voor elke basis).

10 voor de leraar

3.3 Grafentheorie en discrete optimalisatie

Keuze

De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de volgende concepten: graaf, isomorfie, eulergraaf en het Chinese postbodeprobleem, hamiltongraaf en het handelsreizigerprobleem, boom, minimaal opspannende boom, vlakke graaf, chromatisch getal en het vierkleurenprobleem en kortstepadalgoritme.
En een keuze uit: netwerkstomen, toewijzingen en koppelingen.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan in een contextprobleem een grafenprobleem herkennen en dit met behulp van geschikte technieken uit de grafentheorie oplossen.
2. De eerstegraadsleraar kan door basiseigenschappen, begrippen en stellingen te combineren bewijzen opstellen voor eigenschappen van grafen.
3. De eerstegraadsleraar kan bewijzen geven van stellingen en correctheid van algoritmes, in elk geval een selectie uit: eulergraafstelling Fleury, Chinese postbode, Dirac/Ore, Kruskal/Prim, Dijkstra, Eulers formule voor vlakke grafen, ‘vijf’- of ‘zes’-kleurenstelling.
4. De eerstegraadsleraar kan toepassingen van grafentheorie noemen, bijvoorbeeld: het handelsreizigerprobleem met heuristiek en kwaliteitsuitspraak, shift registers en rijen van De Bruijn, zoekmachines en page ranking.
5. De eerstegraadsleraar kan onderzoeken of een graaf vlak is en een classificatie geven van niet-vlakke grafen (Kuratowski).
6. De eerstegraadsleraar kan naast bovenstaande basisbegrippen en basiskenmerken zich verder theoretisch verdiepen in enkele onderwerpen uit de grafentheorie, zoals:
   (a) netwerkstromen: een maximale stroom construeren (tegen minimale kosten) in een netwerk met het algoritme van Ford en Fulkerson;
   (b) koppelingen:
      i. een koppelingsprobleem herkennen en in verband brengen met een maximalestroomprobleem;
      ii. een complete koppeling in verband brengen met de hallvoorwaarde en een maximale koppeling construeren met behulp van Konigs wisselpadalgoritme;
   (c) toewijzingen: een toewijzingsprobleem oplossen met behulp van het Hongaarse algoritme van Egerváry.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 2

1. Bewijs dat een specifieke lijn van een gelabelde volledige graaf K_n in precies $2 \cdot n^{n-3}$ opspannende bomen van K_n voorkomt.
2. Leid een formule af voor het aantal lijnen van de lijngraaf van W_k (wielgraaf met k ‘spaken’).

Vragen bij indicator 6b

1. Bewijs dat er, zolang nog geen nultoewijzing is gevonden, bij elke iteratie van het Hongaarse algoritme ($n \times n$-matrix) een nulbedekking bestaat van minder dan n lijnen.

2. Hieronder zie je de reiskostentabel voor een vergaderprobleem. De letters geven reizigers aan en de cijfers de bestemmingen. Wat kosten de reizen samen minimaal en hoe kan dit bedrag worden gerealiseerd?

	1	2	3	4	5
A	50	41	50	85	42
B	110	122	54	147	57
C	127	78	151	99	172
D	109	67	144	73	160
E	52	102	117	89	49

3.4 Combinatoriek

Keuze

De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de volgende concepten: combinatie, variatie, permutatie, multinomiaalcoëfficiënt, partitie, recurrente betrekking, inclusie/exclusie en formele machtreeks.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan bij telproblemen met of zonder terugleggen en met of zonder herhalingen het juiste model hanteren.
2. De eerstegraadsleraar kan voor een gegeven (in)homogene lineaire recurrente betrekking met constante coëfficiënten met behulp van de karakteristieke vergelijking de rangnummerformule afleiden.
3. De eerstegraadsleraar kan de formule van inclusie/exclusie in voorkomende gevallen toepassen.
4. De eerstegraadsleraar kan een combinatorisch vraagstuk door middel van formele machtreeksen vertalen naar een algebraïsch vraagstuk.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 1 en 3

1. Een vereniging gaat stemmen over de nieuwe voorzitter. Er zijn vijf kandidaten, Auke, Bart, Chris, Denise en Eva. De overige 20 leden mogen elk één stem uitbrengen op een van deze kandidaten. Een mogelijke uitslag van de verkiezingen is bijvoorbeeld: 3 stemmen voor Auke, 4 stemmen voor Bart, 0 stemmen voor Chris, 7 stemmen voor Denise en 6 stemmen voor Eva. Hoeveel uitslagen zijn mogelijk?

2. We hangen een vlaggenlijn van oranje, witte en blauwe vlaggen op tussen een boom en de schuur. We hebben plaats voor twintig vlaggen, en we willen dat iedere kleur tenminste één keer voorkomt. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

3. We maken nog zo'n vlaggenlijn van oranje, witte en blauwe vlaggen tussen de boom en de schuur. We hebben wederom plaats voor twintig vlaggen, maar nu willen we dat er precies drie oranje vlaggen zijn, die bovendien niet naast elkaar mogen hangen. Hoeveel mogelijkheden zijn er nu?

Vragen bij indicator 2 en 4

1. Los de volgende recurrente betrekking op:

$$a(n) = 9a(n-1) - 14a(n-2) \text{ met } n \in \mathbb{N} \text{ en } n > 1,$$
$$a(0) = 4 \text{ en } a(1) = 13.$$

Het aantal rijtjes bestaande uit de symbolen 1 en 2, waarvan de som van de elementen gelijk is aan n, noemen we $b(n)$.

2. Stel een recurrente betrekking op voor $b(n)$, met beginvoorwaarden.
3. Los de recurrente betrekking op met behulp van formele machtreeksen.

3.5 Algebra

Keuze

De eerstegraadsleraar is bekend met een algebraïsche structuur.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan zich verdiepen in groepentheorie (onder andere ondergroep, orde normaaldeler, isomorfie en symmetriegroepen).
2. De eerstegraadsleraar kan zich verdiepen in ringen en lichamen (onder andere oplossen van vergelijkingen, ideaal, quotiëntring en euclidische ring).
3. De eerstegraadsleraar kan zich verdiepen in lichaamsuitbreidingen als lineaire ruimten (verband met meetkundige constructies).

Kenmerkende voorbeeldvragen

Indien gekozen is voor indicator 1 'groepentheorie':

1. Toon aan dat de diëdergroep van de gelijkzijdige driehoek isomorf is met de symmetrische permutatiegroep van drie elementen.
2. Bewijs de stelling van Lagrange over de orde van een ondergroep.

Indien gekozen is voor indicator 2 'ringen en lichamen':

1. Bepaal alle elementen van de restklassenring $\mathbb{Z}[X]/(2, x^3)$.
2. Bepaal de multiplicatieve inverse van $\overline{X+1}$.
3. Is $\mathbb{Z}[X]/(2, x^3)$ een lichaam?

Indien gekozen is voor indicator 3 'lichaamsuitbreidingen als lineaire ruimten':

1. Bewijs dat de dimensie van de lineaire ruimte $\mathbb{Q}(\cos 20°)$ over het lichaam $\mathbb{Q}$ geen macht van 2 is.
2. Bewijs uit 1) dat een regelmatige negenhoek niet met passer en liniaal kan worden geconstrueerd.

10 voor de leraar

Domein 4: Statistiek en kansrekening

4.1 Statistiek

Verplicht

De eerstegraadsleraar kent en begrijpt de volgende concepten: kansruimten, kansverdelingen, schatten, betrouwbaarheid, toetsen van hypothesen, onderscheidingsvermogen, verdelingsvrije toetsen, verschiltoetsen, correlatie, regressie en kwantitatief onderzoek.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan kansdichtheids- en kansverdelingsfunctie, verwachting en variantie gebruiken (en deels afleiden) van onder andere binomiale, poisson-, hypergeometrische en normale verdelingen.
2. De eerstegraadsleraar kan de kansverdelingen herkennen en hanteren die bij toetsen gebruikt worden.
3. De eerstegraadsleraar kan standaardtoetsen herkennen, verklaren en toepassen, waaronder in elk geval een selectie uit: toetsen op proporties, toetsen op passing en onafhankelijkheid (χ^2-toetsen), toetsen voor gemiddelde (t-toets) en variantie (F-toets), gepaarde en ongepaarde verschiltoetsen en one-way anova.
4. De eerstegraadsleraar kan een statistische onderzoek doen (conceptualiseren, mathematiseren, oplossen, interpreteren) met gebruik van een bestaande, grote dataset en daarbij de bovenstaande concepten inzetten.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 1

$X(i)$ zijn onafhankelijke kansvariabelen met $i = 1, 2, 3$.
Verder geldt $P\big(X(i) = 1\big) = P\big(X(i) = 2\big) = \frac{1}{2}$.
Bepaal de kansverdeling van $X(1) \cdot X(2) \cdot x(3)$ en de verwachting en de variantie van deze kansvariabele.

Vragen bij indicator 4

Op een school wordt het onderwijs in de onderbouw ook aangeboden in een speciale afdeling: de muzische afdeling. In die afdeling zitten kinderen met een speciale begaafdheid voor muziek, dans of beeldende kunsten heterogeen bij elkaar (vmbo, havo, vwo dus bij elkaar). Na drie jaar stromen deze leerlingen samen met de leerlingen uit het reguliere onderwijs in in de bovenbouw. Men vraagt zich af of er verschillen zijn in de beheersing van de leerstof van de onderbouw in het begin van klas 4. Onderzoek dit aan de hand van de rapportcijfers van alle vakken van de leerlingen in 4 havo en 4 vwo en stel een rapport op voor het management waarin je bevindingen besproken worden.
[Bij deze opdracht hoort een databestand met de rapportcijfers.]

10 voor de leraar

Domein 5: Wetenschappelijke grondslagen en ontwikkelingen

5.1 Grondslagen

Verplicht

De eerstegraadsleraar is bekend met de volgende thema's uit de filosofie van de wiskunde:

1) rond oneindigheid: de paradoxen van Zeno, het limietbegrip, het hilberthotel, kardinaliteit en overaftelbaarheid;
2) rond formalisme en waarheid: Plato's ideeënwereld, de axiomatische methode bij Euclides, de formalisering van de wiskunde in de moderne tijd en het optreden van paradoxen, onafhankelijkheid van axioma's zoals het parallellenpostulaat en de continuümhypothese, consistentie en volledigheid en de onvolledigheidstellingen van Gödel;
3) rond constructie: passer-en-liniaal-constructies, (niet-)constructieve existentiebewijzen, Brouwers verwerping van de uitgesloten derde, de these van Turing en Church en de mogelijkheden en beperkingen van algoritmen.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan bestaande opvattingen over de wiskunde benoemen en vergelijken.
2. De eerstegraadsleraar kan bestaande opvattingen over de wiskunde in verband brengen met metamathematische resultaten.
3. De eerstegraadsleraar kan de logisch-deductieve methode die binnen de wiskunde wordt gebruikt beschrijven en vergelijken met redeneerwijzen in andere wetenschappen en in het maatschappelijk debat.
4. De eerstegraadsleraar kan zich verder theoretisch verdiepen in minstens een van de onderstaande onderwerpen:
   (a) Euclides' boek I bezien vanuit de positie van het parallellenpostulaat, modellen van Poincaré en Klein voor de niet-euclidische meetkunde en de betekenis van deze modellen;
   (b) verzamelingenleer: epsilonrelatie, inclusie, vereniging, doorsnede, complement, product, relatie, functie, quotiënt, machtigheid en kardinaalgetallen;
   (c) werken in een formeel systeem zoals de peanorekenkunde;
   (d) invoering van de getallenverzamelingen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$;
   (e) turingmachines, de universele turingmachine en de toepassing op Hilberts Entscheidungsproblem.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 4a

Lang hoopten wiskundigen dat het parallellenpostulaat af te leiden zou zijn uit de overige axioma's van de euclidische meetkunde. Hoe weten wij tegenwoordig dat dat nooit zal lukken?

Vragen bij indicator 4b

Volgens Galilei kun je niet spreken van "het aantal (natuurlijke) getallen" omdat het twee keer zo groot zou zijn als het aantal even getallen, maar tegelijkertijd over even groot. Leg uit hoe Cantor deze paradox oploste.

10 voor de leraar

Vragen bij indicator 4e
Op dit moment wordt er gewerkt aan computerprogramma's die bewijzen leveren voor wiskundige stellingen. Wat zegt Turings *Application on the Entscheidungsproblem* over het mogelijk welslagen van deze onderneming?

5.2 Geschiedenis

Optioneel

De eerstegraadsleraar kent in hoofdlijnen de geschiedenis van de wiskunde met betrekking tot:

1) de onderwerpen waarmee wiskundigen zich in opeenvolgende tijdvakken bezighielden;
2) de vorm waarin wiskunde beoefend werd;
3) de manier waarop de beoefening georganiseerd was;
4) de wetenschappelijke attitude ten aanzien van het vak;
5) de wisselwerking tussen ontwikkelingen in de wiskunde enerzijds en in de politiek, de cultuur en economie anderzijds.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar kan de wiskunde in de volgende tijdvakken typeren: oudheid, middeleeuwen, renaissance, zeventiende eeuw, verlichting, negentiende eeuw, moderne tijd.
2. De eerstegraadsleraar kan de rol schetsen die specifieke sleutelfiguren speelden, zoals: Pythagoras, Euclides, Archimedes, Fermat, Descartes, Pascal, Newton, Leibniz, Euler, Gauss, Weierstrass, Cantor, Cauchy, Riemann, Hilbert, Brouwer, Nash, Turing, Gödel en Wiles.
3. De eerstegraadsleraar kan de belangrijke etappen aangeven in de historische ontwikkeling van getalbegrip en numerieke methoden en van de vakgebieden meetkunde, analyse, algebra, statistiek en besliskunde en voorbeelden geven van de onderlinge beïnvloeding van deze vakgebieden.
4. De eerstegraadsleraar kan van een representatieve selectie van bronnenmateriaal (d.w.z. fragmenten van authentieke wiskundige verhandelingen in transcriptie of moderne vertaling) aan de hand van vakliteratuur:
   (a) de wiskundig inhoud blootleggen en analyseren;
   (b) de aanpak vergelijken met de eigentijdse benadering;
   (c) de thematiek, aanpak en geest plaatsen in het betreffende tijdvak;
   (d) de inhoud plaatsen in de lijn waarlangs het onderwerp zich ontwikkeld heeft;
   (e) de inhoud plaatsen in het leven en werk van de schrijver.
5. De eerstegraadsleraar kan thema's uit de geschiedenis van de wiskunde verweven met het eigen onderwijs in de bovenbouw.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 3
Tot de ontdekking van de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ werd bij getallen gedacht aan "aantallen". Maar omdat $\sqrt{2}$ niet uit te drukken bleek als verhouding van aantallen

moest het getalbegrip worden aangepast in de richting van “lengtes”. Vaker in de geschiedenis moest het getalbegrip worden aangepast omdat getallen bepaalde eigenschappen niet bleken te hebben, of juist wel. In dit verband noemen we:
1) rationaal versus irrationaal 2) construeerbaar (met passer en latje)
3) algebraïsch versus transcendent 4) te schrijven als machtreeks 5) te schrijven als kettingbreuk.

Zoek uit wat deze termen betekenen, onderzoek welke bekende constanten zoals $\sqrt{2}$, e en π de betreffende eigenschap hebben, door wie en wanneer zulks bewezen werd en onderzoek in welke periode en in welke context deze begrippen werden ontwikkeld. Zoek daarbij de bijbehorende historische bronteksten.

Vragen bij indicator 1 en 2
De getallenmatrix van binomiaalcoëfficienten “n boven m” draagt niet geheel terecht de naam ‘driehoek van Pascal’. Dezelfde getallendriehoek is namelijk al terug te vinden in Chinese en Arabische handschriften die vele eeuwen ouder zijn dan het beroemde *Traité du triangle arithmétique* van Blaise Pascal uit 1654. Wel was Pascal de eerste die de algemene eigenschappen van de getallen in de driehoek bewees.

1. In hoeverre is de bewijsvoering van Pascal in het traité naar moderne maatstaven nog acceptabel.

In hoofdstuk 2 bouwt Pascal de theorie van de binomiaalcoëfficiënten op, daar treffen wij het volgende lemma:

> *Lemma 4*
> Stel je neemt 4 willekeurige getallen. Het eerste getal (E) kies je willekeurig. Het tweede getal (T) neem je groter dan het eerste getal. Het derde getal (D) mag je willekeurig kiezen, maar moet groter zijn dan het tweede getal. Het vierde getal (V) neem je 1 groter dan het derde getal. Dan geldt: Aantal combinaties van E uit D + aantal combinaties T uit D = aantal combinaties T uit V.

2. Formuleer het bovenstaande lemma in moderne bewoordingen waarbij duidelijk wordt waar de vier getallen E, T, D en V precies voor staan in relatie tot de parameters van de getallen uit de driehoek van Pascal.

Domein 6: Vakdidactiek

6.1 Vakdidactiek

Verplicht

De eerstegraadsleraar heeft kennis en kunde op de volgende gebieden:
1. het wiskundecurriculum,
2. doelen, relevantie van wiskunde,
3. leren en onderwijzen van wiskunde,
4. toetsing van wiskunde.

Punt 3 is hierin centraal.

Bij het leren en onderwijzen van wiskunde zullen domeinspecifieke thema's naar komen voren zoals bijvoorbeeld:

- algebra: didactiek van het variabelebegrip (inclusief parameters, algebraïsche basisvaardigheden en symbol sense);
- analyse: didactiek van functiebegrip en afgeleide functie;
- meetkunde: didactiek van bewijzen in de vlakke meetkunde, analytische meetkunde, logisch redeneren;
- statistiek: didactiek van het kansbegrip, de relatie tussen steekproef en populatie.

Daarnaast wordt een aantal domeinoverstijgende thema's onderscheiden, zoals bijvoorbeeld:

- kenmerken van wiskundige bekwaamheid en wiskundig denken;
- benaderingen van het leren en onderwijzen van wiskunde, zoals de realistische en de mechanistische benadering;
- didactiek van ict-gebruik in de wiskundeles.

Indicatoren

1. De eerstegraadsleraar overziet en beheerst de gehele stof van de wiskundecurricula van havo en vwo.
2. De eerstegraadsleraar kan:
   (a) doelen en relevantie van wiskunde benoemen;
   (b) vakdidactische opvattingen verantwoorden, gebaseerd op literatuur.
3. De eerstegraadsleraar kan:
   (a) leerprocessen analyseren en evalueren mede op basis van wetenschappelijke literatuur;
   (b) onderwijs (lessen en lesmaterialen) analyseren, ontwerpen en evalueren mede op basis van wetenschappelijke literatuur.
4. De eerstegraadsleraar kan:
   (a) beargumenteerd passende toetsvormen en toetsinhouden kiezen en toetsen ontwerpen;
   (b) toetsen en leerlingenwerk analyseren en daarmee inzicht krijgen in het leerproces van leerlingen.

Kenmerkende voorbeeldvragen

Vragen bij indicator 3a en 3b

Schrijf een artikel over functiebegrip en het leren daarvan. Wat houdt functiebegrip in? Welke moeilijkheden ondervinden leerlingen bij het leren van functies? En wat zijn effectieve instructiestrategieën en opdrachten voor het leren van functies in het VO?

Lees tenminste 3 artikelen m.b.t. functiebegrip en beantwoord deze vragen in een samenhangende tekst (max. 600 woorden).

Ontwerp met 2 of 3 andere studenten enkele wiskundeopgaven over functies. Gebruik hierbij theorieën over de ontwikkeling van het functiebegrip en de onderzoeken naar moeilijkheden die leerlingen ondervinden bij het leren over functies.

Vragen bij indicator 2a en 2b
Analyseer verschillende opvattingen over het leren en onderwijzen van wiskunde. Gebruik daarbij bronnen zoals die van Ernest (*The Philosophy of mathematics education*), Freudenthal (realistisch wiskundeonderwijs), Van Streun (heuristisch wiskundeonderwijs).

Ontwikkel twee lessen over hetzelfde onderwerp gebaseerd op verschillende opvattingen over wiskundeonderwijs. Onderbouw je keuzes in de les op basis van de literatuur.

5 Redactie en validering

Redactieteam

Theo van den Bogaart	Hogeschool Utrecht
Gerrit Roorda	NHL Stenden Hogeschool
Jan Essers	Fontys Lerarenopleiding Tilburg
Laura Kubbe	Hogeschool van Amsterdam
Fred Muijrers	Hogeschool van Arnhem en Nijmegen
Kevin de Bruijn	Fontys Lerarenopleiding Sittard

Valideringsgroep

Paul Drijvers	Hoogleraar Universiteit Utrecht, lector Hogeschool Utrecht
Swier Garst	Voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en docent wiskunde
Gerard Jeurnink	Universitair docent wiskunde, Universiteit Twente
Jan van Zweden	Docent wiskunde, Bonifatius College Utrecht
Theo van den Bogaart	Secretaris LOVM, hoofddocent wiskunde en wiskundedidactiek, Hogeschool Utrecht
Gerrit Roorda	Voorzitter LOVM-wiskunde, docent, vakdidacticus, NHL Stenden Hogeschool en Rijksuniversiteit Groningen
Petra Smulders	Voorzitter valideringsgroep, stuurgroep LOVM, Hogeschool van Amsterdam
Monika Vaheoja	Projectleider, 10voordeleraar

Colofon

Den Haag, maart 2018

Uitgave

10voordeleraar, Vereniging Hogescholen

www.10voordeleraar.nl